

基于 EM 的主动段弹道导弹跟踪算法研究

薛高茹, 梁彦, 谯平, 杨柳青

(西北工业大学自动化学院, 陕西西安 710072)

摘要: 为了提高未知弹道参数下主动段目标跟踪的精度, 提出基于期望最大化(Expectation Maximization, EM)的联合优化算法框架. 首先在 E 步基于平滑器得到状态和未知参数的后验估计, 然后在 M 步计算初始状态的均值、协方差以及过程噪声协方差等未知统计量, 最后推导出基于 URTS(Unscented Rauch-Tung-Striebel)的 EM 算法, 并给出未知统计量的最优解析解, 避免了非凸优化难以求解的问题. 仿真结果表明: 在相同量级的计算量下, 本文算法的状态估计精度优于迭代 UKF(Unscented Kalman Filter)算法.

关键词: 弹道导弹; 主动段; 期望最大化; 参数辨识; 联合优化

中图分类号: V19 **文献标识码:** A **文章编号:** 0372-2112 (2017)07-1770-05

电子学报 URL: <http://www.ejournal.org.cn> **DOI:** 10.3969/j.issn.0372-2112.2017.07.030

Research on Boost-Phase Ballistic Missile Tracking Algorithm Using EM

XUE Gao-ru, LIANG Yan, QIAO Ping, YANG Liu-qing

(School of Automation, Northwestern Polytechnical University, Xi'an, Shaanxi 710072, China)

Abstract: In this paper, framework of joint optimization algorithm based on EM (Expectation Maximization) is proposed for tracking a boost-phase ballistic target with unknown ballistic parameters. Firstly, the state and unknown parameters are estimated based on smoother in the E step. Then the mean and covariance of initial states, and the noise covariances are calculated in the M step. At last, URTS (Unscented Rauch-Tung-Striebel) based on EM is derived and the analytical forms of unknown statistics parameters are given, which makes the non-convex numerical optimization unnecessary. The result shows that the proposed algorithm is more accurate than iterative UKF (Unscented Kalman Filter) with the same order of magnitude of calculation.

Key words: ballistic missile; boost-phase; EM; parameter identification; joint optimization

1 引言

为了及时准确地预测弹道导弹落点位置和时间, 预警系统需在弹道导弹主动段发现并跟踪上目标^[1]. 准确的弹道参数辨识以及精确的目标状态估计是实现主动段目标高精度跟踪的关键^[2]. 主动段跟踪存在一些难点: 建模困难, 无法获得目标的运动参数, 如: 推力类型和大小、目标质量、目标动力特性等; 实时性要求高, 主动段飞行速度最高可达 20 马赫, 飞行时间一般在几十秒到几百秒范围内.

针对弹道导弹主动段跟踪, 国内外学者做了深入研究. 文献[3]综述了导弹目标的运动模型, 讨论了不同坐标系下弹道目标各个阶段的多种运动模型; 文献[4,5]通过改进现有非线性滤波算法改善跟踪精度, 但

未对模型中的参数进行估计, 因此会造成模型不精确; 文献[6]建立了精确的导弹模型, 利用扩展卡尔曼滤波完成了对目标的跟踪, 但算法依赖于参数建模、初始状态及协方差以及过程噪声等, 不合理的先验信息将会导致滤波器的不稳定甚至发散. 针对以上问题, 本文建立了基于圆球体地球的重力转弯模型; 然后对动力学模型中的未知参数进行灵敏性分析, 把对状态不敏感的参数当作常量, 从而简化运动模型; 最后将状态向量作为缺失变量, 将未知统计量作为待辨识参数, 提出了基于 EM 的估计与辨识联合优化算法.

2 问题描述

2.1 主动段动力学模型

考虑圆球体地球模型下的三维目标跟踪, 将导弹

看作一个质点,在主动段飞行过程中所受的作用力主要包含推力、重力、阻力和表视力(牵引惯性和科里奥利力)^[4].主动段运动模型可表示为:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{r}} = \mathbf{v} \\ \dot{\mathbf{v}} = \mathbf{a}_c + \mathbf{a}_d + \mathbf{a}_r + \mathbf{a}_c \end{cases} \quad (1)$$

式中 $\mathbf{r} = [x; y; z]$ 为目标在地心固定直角坐标系 (ECEF) 下的位置矢量, $\mathbf{v} = [\dot{x}; \dot{y}; \dot{z}]$ 为速度矢量; $\mathbf{a}_c = -\mu \frac{\mathbf{r}}{r^3}$ 为重力加速度, μ 为地球引力常量; $\mathbf{a}_d(t) = \frac{\rho v^2(t)}{2\beta} \cdot \frac{\mathbf{v}}{v}$ 为气动阻力加速度, $\rho = \rho_0 e^{-kh}$ 为空气密度, h 为水平高度, $\beta = \frac{C_s}{m}$ 为质阻比, m 为导弹质量, C 为大气阻力系数, s 为与速度正交的弹体截面积; $\mathbf{a}_r(t) = \frac{V_E M}{1 - Mt}$ 为推力加速度, $V_E = I_{sp} g$ 为排气速度, $M = \frac{\dot{m}}{m(0)}$ 为归一化的质量变化率; $\mathbf{a}_c = -\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) - \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}$ 为表视力加速度, $\boldsymbol{\omega}$ 为地球自转角速度矢量.

将式(1)进行整合,并令 $l = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, $v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}$, $a = \frac{V_E M}{1 - Mt}$,可以得到 ECEF 坐标系下导弹主动段动力学方程:

$$\begin{cases} \dot{r}_x = \dot{x}, \dot{r}_y = \dot{y}, \dot{r}_z = \dot{z} \\ \ddot{x} = -\frac{\mu x}{l^3} - \frac{\rho(h)}{2\beta} v \dot{x} + a \frac{\dot{x}}{v} + (2\omega \dot{y} + \omega^2 x) \\ \ddot{y} = -\frac{\mu y}{l^3} - \frac{\rho(h)}{2\beta} v \dot{y} + a \frac{\dot{y}}{v} - 2\omega \dot{x} + \omega^2 y \\ \ddot{z} = -\frac{\mu z}{l^3} - \frac{\rho(h)}{2\beta} v \dot{z} + a \frac{\dot{z}}{v} \end{cases} \quad (2)$$

2.2 参数灵敏度分析

式(2)中涉及 V_E 、 M 和 β 三个参数,在跟踪系统中,待估计或辨识的参数越多耗费的时间越长,因此对 V_E 、 M 和 β 进行灵敏度分析.将式(2)写为 $\dot{\mathbf{X}} = f(t, \mathbf{X}, \boldsymbol{\theta})$,则参数灵敏度计算公式为:

$$S_i(t) = \left. \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \theta_i} \right|_{\theta_i = \theta_i^0} \quad (i = 1, 2, \dots, m) \quad (3)$$

为了避免对微分方程求解,将上式简化为:

$$\begin{cases} S_i = [S_{i1} \ S_{i2} \ \dots \ S_{im}]^T \\ S_{ij} = \frac{(X_j^p - X_j^0)/X_j^0}{(\theta_i^p - \theta_i^0)/\theta_i^0} \end{cases} \quad (4)$$

其中 $\mathbf{X} \in R^n$ ($n = 6$), $\boldsymbol{\theta} = [V_E; M; \beta] \in R^m$ ($m = 3$), S_{ij} 表示第 i 个参数对第 j 维状态的敏感性, X_j^0 表示参数为 θ_i^0 时向量 \mathbf{X} 中第 j 个元素的值, θ_i^0 表示参数 θ_i^0 加入扰动 $\Delta\theta_i$ 后的值, X_j^p 表示参数为 θ_i^p 时向量 \mathbf{X} 中第 j 个元素的值.

将 V_E 、 M 和 β 分别增大 1% 并保持其他参数不变,计算导弹位置与速度的变化规律.结果表明:在导弹飞

行的主动段, β 的灵敏性最弱,几乎为零.因此,在后面的跟踪算法中将质阻比 β 当作常数.

2.3 状态方程和量测方程的建立

设扩维状态 $\tilde{\mathbf{X}} = [\mathbf{X}; \boldsymbol{\theta}] \in R^n$ ($n = q + r$), 系统状态方程可表示为:

$$\tilde{\mathbf{X}}_{k+1} = \begin{bmatrix} \mathbf{X}_{k+1} \\ \boldsymbol{\theta}_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F(\mathbf{X}_k, \boldsymbol{\theta}_k) + \boldsymbol{\omega}_k \\ \boldsymbol{\theta}_k \end{bmatrix} \quad (5)$$

其中, $\mathbf{X}_0 \sim N(\hat{\mathbf{X}}_0, \mathbf{P}_0)$, $\boldsymbol{\theta} \sim N(\hat{\boldsymbol{\theta}}_0, \mathbf{S})$, \mathbf{X}_{k+1} 是对式(2)进行离散化和线性化得到的, $\boldsymbol{\omega}_k$ 是零均值高斯白噪声序列,其噪声协方差为 $\mathbf{U} \in R^{q \times q}$.

雷达是在雷达坐标系 (ENU) 中对目标进行探测,状态方程是在 ECEF 坐标中建立的,设 ENU 坐标系下的状态为 \mathbf{X}_r ,则 ECEF 坐标到 ENU 坐标的转换表示为:

$$\mathbf{X}_r = \begin{bmatrix} C_e^r(t) & \mathbf{O}_{3 \times 3} \\ \dot{C}_e^r(t) & C_e^r(t) \end{bmatrix} \mathbf{X} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ R_e + H \\ \mathbf{O}_{3 \times 1} \end{bmatrix} \quad (6)$$

$$C_e^r = \begin{bmatrix} -\sin(\varphi) & \cos(\varphi) & 0 \\ -\cos(\varphi) \sin(B) & -\sin(\varphi) \sin(B) & \cos(B) \\ \cos(\varphi) \cos(B) & \sin(\varphi) \cos(B) & \sin(B) \end{bmatrix}$$

$$\dot{C}_e^r = w \begin{bmatrix} -\cos(\varphi) & -\sin(\varphi) & 0 \\ \sin(\varphi) \sin(B) & -\cos(\varphi) \sin(B) & 0 \\ -\sin(\varphi) \cos(B) & \cos(\varphi) \cos(B) & 0 \end{bmatrix}$$

量测方程为:

$$H(\mathbf{X}_r) = \begin{bmatrix} \sqrt{x_r^2 + y_r^2 + z_r^2} \\ \arctan\left(\frac{x_r}{y_r}\right) \\ \arctan\left(\frac{z_r}{\sqrt{x_r^2 + y_r^2}}\right) \end{bmatrix} + \mathbf{v}_k \quad (7)$$

其中 \mathbf{v}_k 是零均值高斯白噪声序列,其噪声协方差为 $\mathbf{R} \in R^{p \times p}$, L 、 B 、 H 分别表示雷达的经度、纬度和高度, R_e 为地球半径, $\varphi = L + wt$.

3 估计辨识联合优化算法

普通跟踪算法要求已知参数的初始值以及与噪声相关的统计特性,但在弹道导弹跟踪中这些统计量很难得到甚至无法得到.因此采用估计辨识联合优化算法对未知统计量 $\lambda(\tilde{\mathbf{X}}_0, \mathbf{P}_0, \mathbf{U}, \mathbf{S})$ 进行辨识,在辨识的基础上对状态进行估计.

定义 缺失变量序列为 $\tilde{\mathbf{X}}_N = \{\tilde{\mathbf{x}}_1, \tilde{\mathbf{x}}_2, \dots, \tilde{\mathbf{x}}_N\}$, 量测序列 $\mathbf{Z}_N = \{z_1, z_2, \dots, z_N\}$, 滑窗长度为 N , $\|\mathbf{x}\|_A^2 = \mathbf{x}^T \mathbf{A}^{-1} \mathbf{x}$, $\mathcal{L}(\mathbf{x}) = \mathbf{x} \mathbf{x}^T$.

在 EM 框架中,完备数据的对数似然函数表示为:

$$\begin{aligned} L_\lambda(\tilde{\mathbf{X}}_N, \mathbf{Z}_N) &= \log P_\lambda \{ \tilde{\mathbf{X}}_N, \mathbf{Z}_N \} \\ &= \log \left\{ p_\lambda(\tilde{\mathbf{x}}_0) \prod_{k=0}^{N-1} p_\lambda(\tilde{\mathbf{x}}_{k+1} | \tilde{\mathbf{x}}_k) \prod_{k=0}^N p_\lambda(\mathbf{z}_k | \tilde{\mathbf{x}}_k) \right\} \end{aligned} \quad (8)$$

给定第 r 次迭代参数估计值 λ_r , 则对数似然函数的条件期望表示为:

$$\begin{aligned} Q(\lambda, \lambda_r) &\triangleq E_{\lambda_r} \{ L_\lambda(\tilde{\mathbf{X}}_N, \mathbf{Z}_N) | \mathbf{Z}_N \} \\ &= \int \log p_\lambda(\tilde{\mathbf{X}}_N, \mathbf{Z}_N) p_{\lambda_r}(\tilde{\mathbf{X}}_N | \mathbf{Z}_N) d\tilde{\mathbf{X}}_N \\ &= I_1 + I_2 + I_3 \end{aligned} \quad (9)$$

$$I_1 = \int \log p_\lambda(\mathbf{x}_0) p_{\lambda_r}(\mathbf{x}_0 | \mathbf{Z}_N) d\mathbf{x}_0 \quad (10)$$

$$I_2 = \sum_{k=0}^{N-1} \iint \log p_\lambda(\tilde{\mathbf{x}}_{k+1} | \tilde{\mathbf{x}}_k) p_{\lambda_r}(\tilde{\mathbf{x}}_{k+1}, \tilde{\mathbf{x}}_k | \mathbf{Z}_N) d\tilde{\mathbf{x}}_k d\tilde{\mathbf{x}}_{k+1} \quad (11)$$

$$I_3 = \sum_{k=0}^N \int \log p_\lambda(\mathbf{z}_k | \tilde{\mathbf{x}}_k) p_{\lambda_r}(\tilde{\mathbf{x}}_k | \mathbf{Z}_N) d\tilde{\mathbf{x}}_k \quad (12)$$

由于状态方程和量测方程均为非线性, 积分很难得到解析表达式. 多种平滑器在非线性问题求解中得到广泛应用, 其中扩展卡尔曼平滑器利用线性化将非线性问题转化为一个近似的线性问题; 基于粒子滤波的近似方法可以应用于任何非线性系统中并且精度较高; URTS 平滑器采用确定性采样来近似后验密度^[8], 可精确到二阶. 本文提供基于平滑器的 EM 算法框架, 因此可根据具体的跟踪对象以及实时性的要求选择合适的平滑器. 下文以 URTS-EM 为例进行推导.

3.1 E 步: 状态估计

3.1.1 平滑估计

Q 函数的计算需要根据 $\tilde{\mathbf{x}}_k$ 的平滑后验分布以及 $\tilde{\mathbf{x}}_k$ 和 $\tilde{\mathbf{x}}_{k+1}$ 的联合概率密度函数进行确定性采样. 根据贝叶斯规则得到 $\tilde{\mathbf{x}}_k$ 及 $\tilde{\mathbf{x}}_{k+1}$ 的联合分布:

$$p(\tilde{\mathbf{x}}_k, \tilde{\mathbf{x}}_{k+1} | \mathbf{Z}_k) = p(\tilde{\mathbf{x}}_{k+1} | \tilde{\mathbf{x}}_k) p(\tilde{\mathbf{x}}_k | \mathbf{Z}_k) \quad (13)$$

给定 $\tilde{\mathbf{x}}_{k+1}$ 和 \mathbf{Z}_k 条件下 $\tilde{\mathbf{x}}_k$ 的联合概率分布:

$$\begin{aligned} p(\tilde{\mathbf{x}}_k | \tilde{\mathbf{x}}_{k+1}, \mathbf{Z}_k) &= \frac{p(\tilde{\mathbf{x}}_k, \tilde{\mathbf{x}}_{k+1} | \mathbf{Z}_k)}{\int p(\tilde{\mathbf{x}}_k, \tilde{\mathbf{x}}_{k+1} | \mathbf{Z}_k) d\tilde{\mathbf{x}}_k} \\ &= p(\tilde{\mathbf{x}}_k | \tilde{\mathbf{x}}_{k+1}, \mathbf{Z}_N) \end{aligned} \quad (14)$$

给定 \mathbf{Z}_N 条件下 $\tilde{\mathbf{x}}_k$ 和 $\tilde{\mathbf{x}}_{k+1}$ 的联合概率分布为:

$$p(\tilde{\mathbf{x}}_k, \tilde{\mathbf{x}}_{k+1} | \mathbf{Z}_N) = p(\tilde{\mathbf{x}}_k | \tilde{\mathbf{x}}_{k+1}, \mathbf{Z}_N) p(\tilde{\mathbf{x}}_{k+1} | \mathbf{Z}_N) \quad (15)$$

$$\text{假设: } p(\tilde{\mathbf{x}}_k | \mathbf{Z}_k) \sim N(\tilde{\mathbf{x}}_k | \mathbf{m}_k, \mathbf{P}_k) \quad (16)$$

$$p(\tilde{\mathbf{x}}_{k+1} | \mathbf{Z}_N) \sim N(\tilde{\mathbf{x}}_{k+1} | \mathbf{m}_{k+1}^s, \mathbf{P}_{k+1}^s) \quad (17)$$

结合式(13)和(16)可得:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{x}_k \\ \mathbf{x}_{k+1} \end{pmatrix} \Big| \mathbf{Z}_k \sim N \left(\begin{pmatrix} \mathbf{m}_k \\ \mathbf{m}_{k+1|k} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mathbf{P}_k & \mathbf{C}_{k+1} \\ \mathbf{C}_{k+1}^T & \mathbf{P}_{k+1|k} \end{pmatrix} \right) \quad (18)$$

结合式(17)和(18), 由式(14)可得:

$$\begin{aligned} p(\tilde{\mathbf{x}}_k | \tilde{\mathbf{x}}_{k+1}, \mathbf{Z}_N) &\sim N(\mathbf{m}', \mathbf{P}') \\ \mathbf{m}' &= \mathbf{m}_k + \mathbf{D}_k(\mathbf{m}_{k+1}^s - \mathbf{m}_{k+1|k}) \\ \mathbf{P}' &= \mathbf{P}_k - \mathbf{D}_k \mathbf{P}_{k+1|k} \mathbf{D}_k^T \end{aligned} \quad (19)$$

其中 $\mathbf{D}_k = \mathbf{C}_{k+1}(\mathbf{P}_{k+1|k})^{-1}$ 表示平滑器增益.

将式(17)和(19)代入(15), 可以得到:

$$\begin{aligned} p(\tilde{\mathbf{x}}_k, \tilde{\mathbf{x}}_{k+1} | \mathbf{Z}_N) &\sim N(\mathbf{m}_{k+1}^{ss}, \mathbf{P}_{k+1}^{ss}) \\ \mathbf{m}_{k+1}^{ss} &= \begin{bmatrix} \mathbf{m}_k + \mathbf{D}_k(\mathbf{m}_{k+1}^s - \mathbf{m}_{k+1|k}) \\ \mathbf{m}_{k+1}^s \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (20)$$

$$\mathbf{P}_{k+1}^{ss} = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_k + \mathbf{D}_k(\mathbf{P}_{k+1}^s - \mathbf{P}_{k+1|k})\mathbf{D}_k^T & \mathbf{D}_k \mathbf{P}_{k+1}^s \\ \mathbf{P}_{k+1}^s \mathbf{D}_k^T & \mathbf{P}_{k+1}^s \end{bmatrix}$$

对式(20)关于 $\tilde{\mathbf{x}}_{k+1}$ 求积分得:

$$\begin{aligned} p(\tilde{\mathbf{x}}_k | \mathbf{Z}_N) &\sim N(\tilde{\mathbf{x}}_k | \mathbf{m}_k^s, \mathbf{P}_k^s) \\ \mathbf{m}_k^s &= \mathbf{m}_k + \mathbf{D}_k(\mathbf{m}_{k+1}^s - \mathbf{m}_{k+1|k}) \\ \mathbf{P}_k^s &= \mathbf{P}_k + \mathbf{D}_k(\mathbf{P}_{k+1}^s - \mathbf{P}_{k+1|k})\mathbf{D}_k^T \end{aligned} \quad (21)$$

由于式(21)可以看出平滑器估计是一个后向递推过程, 因此首先进行前向滤波, 具体由 UKF 基于确定性采样实现, 然后将滑窗内第 N 时刻的滤波结果作为该时刻的平滑估计和协方差, 接着从第 N 步开始后向递推直到滑窗初始时刻, 最后得到滑窗内全部平滑结果.

3.1.2 Q 函数计算

假设状态方程(5)和量测方程(6)分别满足 $p(\mathbf{x}_{k+1} | \tilde{\mathbf{x}}_k) \sim N(\mathbf{F}_k, \mathbf{U})$, $p(\mathbf{z}_k | \mathbf{x}_k) \sim N(\mathbf{H}_k, \mathbf{R})$, $\boldsymbol{\theta}_{k+1} = \boldsymbol{\theta}_k$, 因此可以得到:

$$\begin{aligned} \log p_\lambda(\tilde{\mathbf{x}}_0) &= -\frac{1}{2} \left[\|\mathbf{x}_0 - \hat{\mathbf{x}}_0\|_{\mathbf{P}_0}^2 + \log |\mathbf{P}_0| + q \log(2\pi) \right. \\ &\quad \left. + \|\boldsymbol{\theta}_0 - \hat{\boldsymbol{\theta}}_0\|_r^2 + \log |\mathbf{S}| + r \log(2\pi) \right] \end{aligned} \quad (22)$$

$$\log p_\lambda(\tilde{\mathbf{x}}_{k+1} | \tilde{\mathbf{x}}_k) = -\frac{1}{2} \left[\|\mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{F}_k\|_U^2 + \log |\mathbf{U}| + q \log(2\pi) \right] \quad (23)$$

$$\log p_\lambda(\mathbf{z}_k | \tilde{\mathbf{x}}_k) = -\frac{1}{2} \left[\|\mathbf{z}_k - \mathbf{H}_k\|_R^2 + \log |\mathbf{R}| + p \log(2\pi) \right] \quad (24)$$

将式(22)~(24)代入式(10)~(12), 可以得到条件期望函数:

$$\begin{aligned} I_1 &= \text{Tr} \left[\mathbf{P}_0^{-1} \{ (\mathbf{P}_{0|N})^x + \mathcal{L}(\hat{\mathbf{x}}_{0|N} - \hat{\mathbf{x}}_0) \} \right] + \log |\mathbf{P}_0| \\ &\quad + \text{Tr} \left[\mathbf{S}^{-1} \{ (\mathbf{P}_{0|N})^\theta + \mathcal{L}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{0|N} - \hat{\boldsymbol{\theta}}_0) \} \right] + \log |\mathbf{S}| + c \end{aligned} \quad (25)$$

$$\begin{aligned} I_2 &= \text{Tr} \left[\mathbf{U}^{-1} \sum_{k=0}^{N-1} \{ (\mathbf{P}_{k+1|N}^{xx})^x + \mathbf{P}_{k|N}^{FF} - \mathbf{P}_{k+1|N}^{xF} - (\mathbf{P}_{k+1|N}^{xF})^T \right. \\ &\quad \left. + \mathcal{L}(\hat{\mathbf{x}}_{k+1|N}^x - \hat{\mathbf{F}}_{k|N}) \} \right] + N \log \mathbf{U} + c \end{aligned} \quad (26)$$

$$\begin{aligned} I_3 &= \text{Tr} \left[\mathbf{R}^{-1} \sum_{k=0}^N \mathcal{L}(\mathbf{z}_k - \hat{\mathbf{H}}_{k|N}) + \mathbf{P}_{k|N}^{HH} \right] \\ &\quad + (N+1) \log |\mathbf{R}| + c \end{aligned} \quad (27)$$

$$\hat{\mathbf{F}}_{k|N} = \int \mathbf{F}_k p_{\lambda_r}(\tilde{\mathbf{x}}_k | \mathbf{Z}_N) d\tilde{\mathbf{x}}_k \quad (28)$$

$$\mathbf{P}_{k|N}^{FF} = \iint \mathcal{L}(\mathbf{F}_k - \hat{\mathbf{F}}_{k|N}) p_{\lambda_r}(\tilde{\mathbf{x}}_{k+1}, \tilde{\mathbf{x}}_k | \mathbf{Z}_N) d\tilde{\mathbf{x}}_k d\tilde{\mathbf{x}}_{k+1} \quad (29)$$

$$\mathbf{P}_{k1N}^{xF} = \iint (\mathbf{x}_{k+1} - \hat{\mathbf{x}}_{k+1N}^x) (\mathbf{F}_k - \hat{\mathbf{F}}_{k1N})^T \times p_{\lambda_r}(\bar{\mathbf{x}}_{k+1}, \bar{\mathbf{x}}_k | \mathbf{Z}_N) d\bar{\mathbf{x}}_k d\bar{\mathbf{x}}_{k+1} \quad (30)$$

$$\hat{\mathbf{H}}_{k1N} = \int \mathbf{H}_k p_{\lambda_r}(\bar{\mathbf{x}}_k | \mathbf{Z}_N) d\bar{\mathbf{x}}_k \quad (31)$$

$$\mathbf{P}_{k1N}^{III} = \int \mathcal{L}(\mathbf{H}_k - \hat{\mathbf{H}}_{k1N}) p_{\lambda_r}(\bar{\mathbf{x}}_k | \mathbf{Z}_N) d\bar{\mathbf{x}}_k \quad (32)$$

其中 c 为常数, $\hat{\mathbf{x}}_{k+1N}^x \in \mathbb{R}^q$ 和 $(\mathbf{P}_{k+1N}^{xx})^x \in \mathbb{R}^{q \times q}$ 分别表示非扩维状态向量的均值和协方差, 可以基于平滑器获得。

3.1.3 UT 变换

根据式(20)平滑分布的递推式, 假设相邻两时刻的确定性采样 sigma 点分别为 $\zeta_{k1N}^{(i)}, \xi_{k+11N}^{(i)} \in \mathbb{R}^q (i=0, \dots, 4n)$, 相应的状态更新权重为 $W_{ms}^{(i)}$, 协方差更新权重为 $W_{cs}^{(i)}$. $\zeta_{k1N}^{(i)}$ 不仅服从分布 $p(\bar{\mathbf{x}}_k, \bar{\mathbf{x}}_{k+1} | \mathbf{Z}_N)$, 同时也服从分布 $p(\bar{\mathbf{x}}_k | \mathbf{Z}_N)$, 因此将两组 sigma 点分别表示为 $\zeta_{k1N}^{(i)} = [\zeta_{k1N}^{x(i)}; \zeta_{k1N}^{\theta(i)}]$ 和 $\xi_{k+11N}^{(i)} = [\xi_{k+11N}^x; \xi_{k+11N}^{\theta(i)}]$. 将式(28) ~ (32) 进行 UT 变换, 可得:

$$\hat{\mathbf{F}}_{k1N} = \sum_{i=0}^{4n} W_{ms}^{(i)} \mathbf{F}(\zeta_{k1N}^{x(i)}, \zeta_{k1N}^{\theta(i)}) \quad (33)$$

$$\mathbf{P}_{k1N}^{FF} = \sum_{i=0}^{4n} W_{cs}^{(i)} \mathcal{L}(\mathbf{F}(\zeta_{k1N}^{x(i)}, \zeta_{k1N}^{\theta(i)}) - \hat{\mathbf{F}}_{k1N}) \quad (34)$$

$$\mathbf{P}_{k1N}^{xF} = \sum_{i=0}^{4n} W_{cs}^{(i)} (\xi_{k+11N}^x - \hat{\mathbf{x}}_{k+1N}^x) \times (\mathbf{F}(\zeta_{k1N}^{x(i)}, \zeta_{k1N}^{\theta(i)}) - \hat{\mathbf{F}}_{k1N})^T \quad (35)$$

$$\hat{\mathbf{H}}_{k1N} = \sum_{i=0}^{4n} W_{ms}^{(i)} \mathbf{H}(\zeta_{k1N}^{x(i)}, \zeta_{k1N}^{\theta(i)}) \quad (36)$$

$$\mathbf{P}_{k1N}^{III} = \sum_{i=0}^{4n} W_{cs}^{(i)} \mathcal{L}(\mathbf{H}(\zeta_{k1N}^{x(i)}, \zeta_{k1N}^{\theta(i)}) - \hat{\mathbf{H}}_{k1N}) \quad (37)$$

3.2 M 步: 参数辨识

M 步的任务是寻找 λ_{r+1} , 从而更新上一次迭代的参数:

$$\lambda_{r+1} = \arg \max_{\lambda} Q(\lambda, \lambda_r) \quad (38)$$

定理 1^[9] 定义方程 $f(\mathbf{Z}) = \text{Tr}(\mathbf{Z}^{-1}\mathbf{A}) + \log |\mathbf{Z}|$, 当正定对称矩阵 $\mathbf{Z} = \mathbf{A}$ 时, $f(\mathbf{Z})$ 取得最小值。

根据定理 1, 结合式(25), 可得:

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_0 = \frac{1}{N+1} \sum_{i=0}^N \hat{\boldsymbol{\theta}}_{01N} \quad (39)$$

$$\hat{\mathbf{x}}_0 = \hat{\mathbf{x}}_{01N} \quad (40)$$

$$\mathbf{P}_0 = (\mathbf{P}_{01N})^x \quad (41)$$

$$\mathbf{S} = \frac{1}{N+1} \sum_{i=0}^N ((\mathbf{P}_{01N})^{\theta} + \mathcal{L}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{01N} - \hat{\boldsymbol{\theta}}_0)) \quad (42)$$

根据定理 1, 结合式(26), 可得:

$$\mathbf{U} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \{ (\mathbf{P}_{k+11N}^{xx})^x + \mathbf{P}_{k1N}^{FF} - \mathbf{P}_{k+11N}^{xF} - (\mathbf{P}_{k+11N}^{xF})^T + \mathcal{L}(\hat{\mathbf{x}}_{k+11N}^x - \hat{\mathbf{F}}_{k1N}) \} \quad (43)$$

本文算法流程如下所示。

算法 1 基于 URTS-EM 的联合优化算法

初始化: 给定 $\hat{\mathbf{x}}_0, \mathbf{P}_0, \hat{\boldsymbol{\theta}}_0, \mathbf{S}, \mathbf{U}, \mathbf{R}$ 和观测样本 $\mathbf{Z}_N = \{z_1, z_2, \dots, z_N\}$, 最大迭代次数 $r_{\max} = 5$ 。

联合估计与辨识算法: 初始化 V_E 和 $M, r = 1, 2, \dots$

1. E 步(状态估计): 根据式(20)和(21)计算 $p_{\lambda_r}(\bar{\mathbf{x}}_{k+1}, \bar{\mathbf{x}}_k | \mathbf{Z}_N)$ 和 $p_{\lambda_r}(\bar{\mathbf{x}}_k | \mathbf{Z}_N)$ 。

2. M 步(参数辨识): 利用式(39) ~ (43) 计算统计量 λ 。

3. 迭代终止: 如果迭代次数 r 大于最大迭代次数 r_{\max} 或者连续两次 Q 函数值相差足够小, 则迭代终止, 否则进入 step1。

递归: 设 $k = k + 1$, 并将参数初值设为上次迭代循环的最终值, 进入下一次迭代循环。

4 仿真分析

根据文献[6]和文献[10], 基于 Simulink 软件仿真助推段弹道, 参数设置如表 1 所示, 仿真结果如图 1 所示。从图中可以看出, 导弹在助推段做加速度不断增大的加速运动。

表 1 仿真参数列表

参数名称	参数大小	参数名称	参数大小
排气速度 V_E (m/s)	4900	质量变化 M	0.009907
w (rad/s)	7.291115×10^{-5}	质阻比 β	4000
ρ_0 (kg/m ³)	1.22	飞行时间 (s)	65
大气标高 k (m ⁻¹)	1.4141×10^{-3}	初始速度 (m/s)	(20, 30, 20)

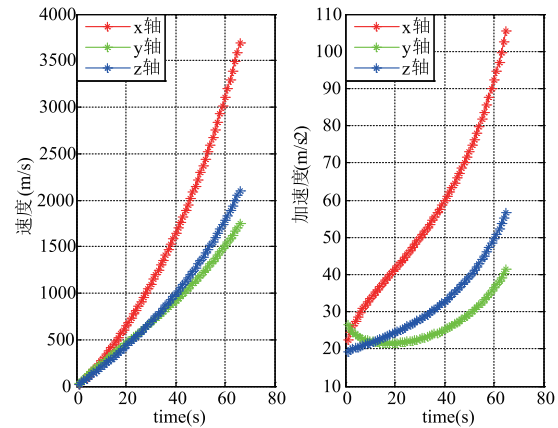


图 1 各轴速度和加速度随时间变化曲线

将本文算法与文献[5]的迭代 UKF (IUKF) 算法进行对比, 两种算法滑窗长度均为 3。算法参数设置: 传感器为前置地基雷达, 部署于东经 84°, 北纬 26°, 导弹初始位置为东经 82°, 北纬 25°, 仿真次数 200, $T = 1$ s, $\mathbf{R} = \text{diag}([100 \ 1e-6 \ 1e-6])$, $\mathbf{U} = \mathbf{\Gamma} \cdot \text{diag}([6400, 400, 1000, 1000, 1e-6]) \cdot \mathbf{\Gamma}^T$, 其中 $\mathbf{\Gamma} = [T^2/2; T; 1] \otimes \mathbf{I}_3$ 。

从图 2、图 3 和表 2 可以看出, 相同量级计算量下, 本文算法的精度优于 IUKF。主要是因为 EM 框架迭代处理所固有的优势, 降低了未知统计量辨识不准确导致的状态估计风险以及状态估计偏差引起的未知统计量辨识误差; 通

过 UT 变换,得到参数的解析解,极大地降低了计算量。

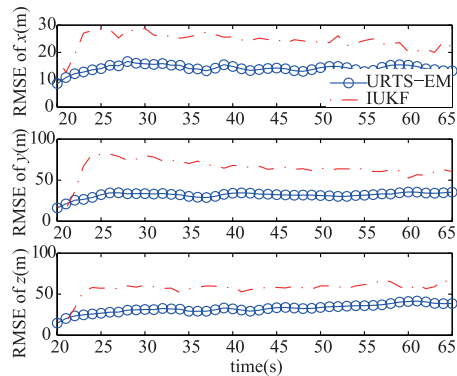


图2 位置估计均方根误差对比

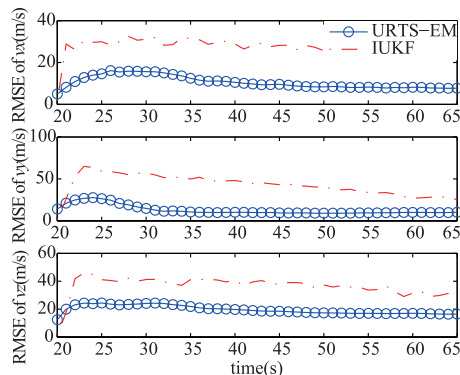


图3 速度估计均方根误差对比

表 2 单次迭代时间对比

算法	URTS-EM	IUKF
时间(s)	0.014932	0.01007

5 总结

针对弹道导弹主动段跟踪问题,本文将弹道目标跟踪和动力学参数辨识问题转化为 EM 框架下的迭代优化求解问题。与传统方法相比,本文算法不依赖于先验参数的假设,与普通 EM 算法相比,本文算法避免了非线性系统中非凸优化求解问题。仿真结果表明 EM 框架下的联合优化算法性能优于 IUKF。

参考文献

- [1] TIAN K S, ZHANG F. Multi-target tracking algorithm of boost-phase ballistic missile defense[J]. Systems Engineering and Electronics, 2013, 24(1): 90-100.
- [2] LIU M, YU J, YANG L, et al. Consecutive tracking for ballistic missile based on bearings-only during boost phase[J]. Systems Engineering and Electronics, 2012, 23(5): 700-707.
- [3] LI X R, JILKOV V P. Survey of maneuvering target tracking Part II: motion models of ballistic and space target[J].

IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, 2010, 46(1): 96-119.

- [4] 钮俊清,单奇,任清安,等.跟踪弹道导弹全阶段可变多模型方法[J].雷达科学与技术,2011,9(3):224-231.
NIU Jun-qing, SHAN Qi, REN Qing-an, et al. A new algorithm with variable-structure multiple model for tracking ballistic missile at entire flight stages[J]. Radar Science and Technology, 2011, 9(3): 224-231. (in Chinese)
- [5] 孙雷,李冬,易东云.基于迭代 UKF 的主动段弹道跟踪算法研究[J].计算机工程与科学,2014,36(1):121-125.
SUN Lei, LI Dong, YI Dong-yun. Research on the trajectory tracking in boost phase based on iterated unscented Kalman filter[J]. Computer Engineering and Science, 2014, 36(1): 121-125. (in Chinese)
- [6] ZHANG F, TIAN K S, XI M L. The ballistic missile tracking method using dynamic model[A]. Proceedings of 2011 IEEE CIE International Conference on Radar[C]. Chengdu: CIE, 2011. 789-794.
- [7] LOGOTHETIS A, KRISHNAMURTHY V. Expectation maximization algorithms for MAP estimation of jump Markov linear systems[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 1999, 47(8): 2139-2156.
- [8] DAI H D, Dai S W, Cong Y C, et al. Performance comparison of EKF/UKF/CKF for the tracking of ballistic target[J]. Telkomnika Indonesian Journal of Electrical Engineering, 2012, 10(7): 1692-1699.
- [9] YOKOYAMA N. Parameter estimation of aircraft dynamic via unscented smoother using multiple data sets[J]. Guidance, Control, and Dynamics, 2011, 34(2): 789-794.
- [10] 周万幸.弹道导弹雷达目标识别技术[M].北京:电子工业出版社,2011.21-30.
ZHOU Wan-xing. BMD Radar Target Recognition Technology[M]. Beijing: Publishing House of Electronics Industry, 2011. 21-30. (in Chinese)

作者简介



薛高茹 女,1992年8月出生于山西运城,硕士研究生,系统工程专业,主要研究方向信息融合、目标跟踪。
E-mail: xgr@mail.nwpu.edu.cn

梁彦 男,1971年出生于河南,博士生导师,主要研究方向为估计理论、信息融合。
E-mail: liangyan@nwpu.edu.cn